المحاضرة الأولى تحليلي :

التحليل التابعي (1)

فضاء باناخ   فضاء هيلبرت   المؤثرات الخطية   الداليات الخطية.

بعض الفضاءات الشهيرة المستخدمة :

- C هي مجموعة كل المتتاليات الحقيقية أو العقدية المتقاربة.
- C_0 هي مجموعة كل المتتاليات الحقيقية أو العقدية المتقاربة من الصفر.
- Z هي مجموعة كل المتتاليات الأساسية (كوشي)
- لا هي مجموعة كل المتتاليات الحقيقية أو العقدية والتي السلاسل المشكلة بها متقاربة $\sum a_k \Leftrightarrow \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$

$1 \le p < \infty$ ℓ_p : هو عبارة عن مجموعة كل المتتاليات الحقيقية أو العقدية والتي تحقق أن السلاسل المشكلة بها متقاربة مطلقاً من الدرجة p.

أي تحقق الشرط: $\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p$

| | قيمة مطلقة بالحقيقية.

| | طويلة بالعقدية.

الحد العام للسلسلة المتقاربة يسعى نحو الصفر

- ℓ_1 مجموعة كل المتتاليات التي السلاسل المشكلة منها متقاربة مطلقاً.

ℓ_∞ : هو مجموعة كل المتتاليات المحدودة أي المحققة للشرط:

$$\sup_{K} |a_k| < +\infty$$

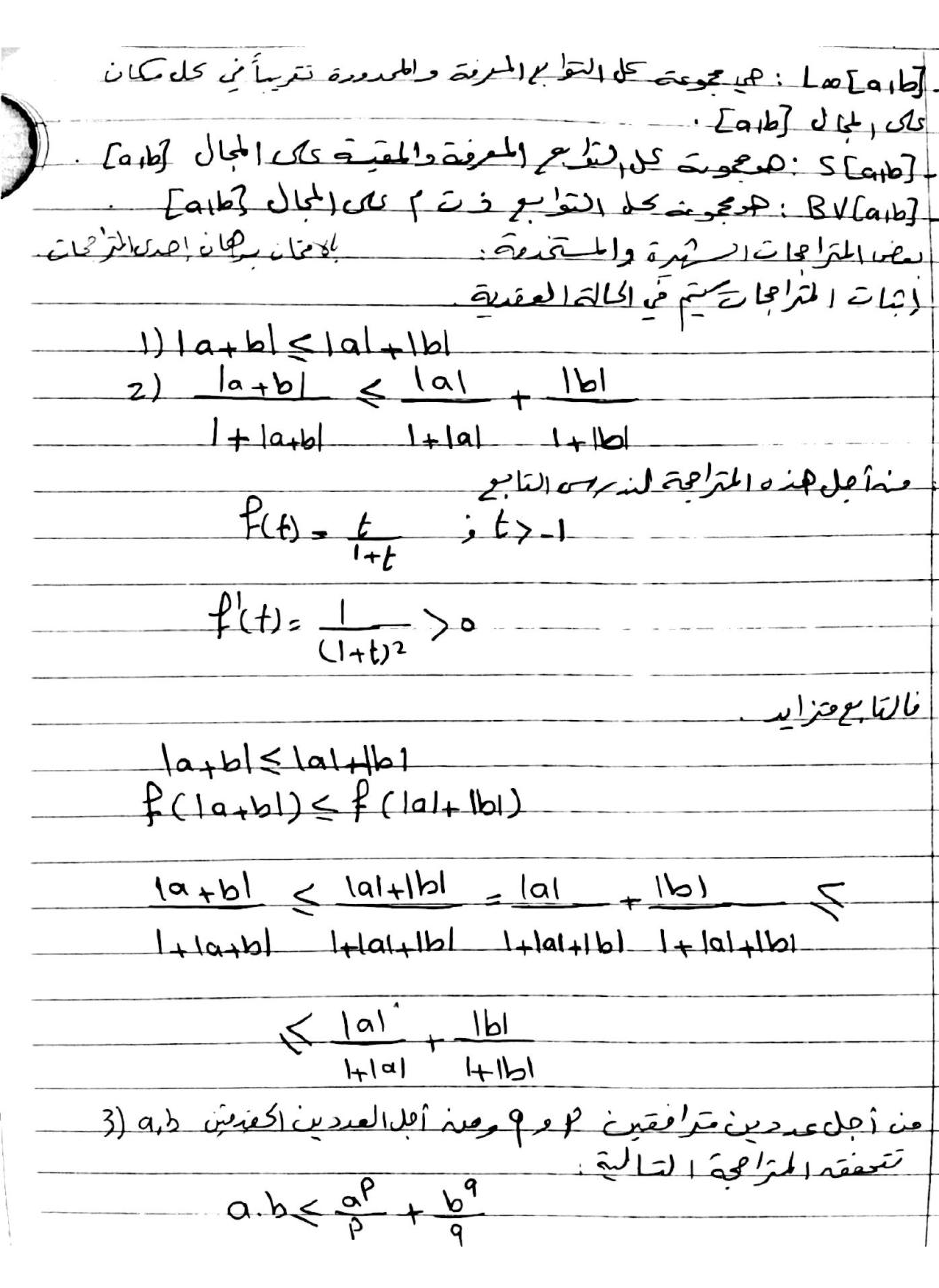
س- $C[a,b]$: هو مجموعة كل التوابع المعرفة الحقيقية والمستمرة على المجال $[a,b]$

ش- $1 \le p < \infty$ $L_p[a,b]$: هو مجموعة كل التوابع المعرفة والمقيسة على المجال $[a,b]$ والمحققة للشرط:

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty$$

- $L_1[a,b]$ هو مجموعة كل التوابع المعرفة والمقيسة على المجال $[a,b]$ والمحققة للشرط:

$$\int_a^b |f(x)| dx < \infty$$



- $L_\infty[a,b]$: هي مجموعة كل التوابع المعرفة والمحدودة تقريباً في كل مكان على المجال $[a,b]$.
- $S[a,b]$: هي مجموعة كل التوابع المعرفة والمقيسة على المجال $[a,b]$.
- $BV[a,b]$: هي مجموعة كل التوابع ذ ت م على المجال $[a,b]$.

بعض المتراجحات الشهيرة والمستخدمة: بالإمكان برهان إحدى المتراجحات

إثبات المتراجحات سيتم في الحالة العددية.

1) $|a+b| \le |a|+|b|$

2) $$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

من أجل هذه المتراجحة ندرس التابع

$$f(t) = \frac{t}{1+t} \quad ; \quad t > -1$$

$$f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$$

فالتابع متزايد.

$$|a+b| \le |a|+|b|$$
$$f(|a+b|) \le f(|a|+|b|)$$

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \le$$

$$\le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

3) من أجل عددين مترافقين p و q ومن أجل العددين الكيفيين a,b تتحقق المتراجحة التالية:

$$a.b \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

٣- تعريف العددين المترافقين :

نقول عن العددين الموجبين q, p أنّهما عددان مترافقان حيث $p > 1$ إذا تحقّق:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \qquad (4)$$

فمثلاً من أجل $p = q = 2$ تكون العلاقة : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ محققة .

ينتج لدينا من التعريف أنّ q, p يحقّقان العلاقات الآتية :

$$q+p=p.q \quad , \quad q=p(q-1) \quad , \quad p=q(p-1)$$

٤- المتراجحة الثالثة :

إذا كان $a, b > 0$ عددين و q, p عددين مترافقين عندئذٍ :

$$a.b \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

وتكون المساواة من أجل : $a^p = b^q$.

الإثبات :

لنأخذ التابع : $f(t)=1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}t-t^{\frac{1}{p}}$ عندئذٍ يكون :

$$f'(t)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}=\frac{1}{p}(1-t^{\frac{1}{p}-1})<0 \quad ; \quad 0<t<1$$

لأنّ :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{p}<1 \;\Rightarrow\; 1-\frac{1}{p}>0$$

وحيث إن : $0<t<1$ فإنّه : $r>1$; $t=\frac{1}{r}$ وبالتالي :

$$t^{\frac{1}{p}-1}=r^{1-\frac{1}{p}}>1 \;\Rightarrow\; 1-r^{1-\frac{1}{p}}<0 \;\Rightarrow\; 1-t^{\frac{1}{p}-1}<0$$

$$f'(t)>0 \quad ; \quad t\geq 1$$

بذلك فإنّ : $f(t)\geq f(1)\geq 0$ من أجل $(t>1)$، وبالتالي يكون:

$$t^{\frac{1}{p}} \leq 1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}t$$

الآن وبالعودة إلى المتراجحة. نجد أنّه في حالة $b=0$ يكون : $0\leq\frac{a^p}{p}$ وهذه محقّقة.

أمّا في حالة $b\neq 0$ نأخذ $t=a^p.b^{-q}$ ونعوّض في العلاقة $t^{\frac{1}{p}}\leq 1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}t$ فنجد:

$$(a^p b^{-q})^{\frac{1}{p}} \leq \underbrace{1-\frac{1}{p}}_{\frac{1}{q}}+\frac{1}{p}(a^p b^{-q})$$

$$ab^{\frac{-q}{p}} \leq \frac{1}{q}+\frac{a^p}{p}.b^{-q} \;\Rightarrow\; ab^{\frac{-q}{p}}b^q \leq \frac{b^q}{q}+\frac{a^p}{p} \Rightarrow\; ab^{q-\frac{q}{p}} \leq \frac{b^q}{q}+\frac{a^p}{p}$$

$$\left(q-\frac{q}{p}=\frac{qp-q}{p}=\frac{q(p-1)}{p}=\frac{p}{p}=1\right)$$

وبالتالي فإنّ : $$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

بالعودة إلى العلاقة $t^{\frac{1}{p}}\leq 1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}t$ نجد أنّ المساواة تتم عندما $t=1$ وبالتالي

فإنّ: $$1=a^p\, b^{-q} \;\Rightarrow\; a^p=b^q$$

٥- متراجحة هولدر للمجاميع :

ليكن $p>1$ و q بحيث : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ وليكن :

$a_1, a_2, ..., a_n\geq 0$ و $b_1, b_2, ..., b_n\geq 0$ فعندئذٍ :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (*)$$

كما أن :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \max_k b_k \qquad (**)$$

تنتج (**) من (*) بوضع $p=1$ (عندئذٍ يكون $\frac{1}{q}\to 0$ وبالتالي تكون q أكبر ما يمكن) .

- **إثبات صحة متراجحة هولدر للمجاميع :**

من المتراجحة الثالثة (السابقة) لدينا:

$$A\,B \le \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q} \qquad (5)$$

عندئذٍ بفرض :

$$A := \frac{a_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}} \quad , \quad B := \frac{b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

وبالتعويض في (5) نجد :

$$\frac{a_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p} \cdot \frac{a_k^p}{\sum_{k=1}^{n} a_k^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{b_k^q}{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}$$

بذلك يكون :

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k . b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

وبالتالي فإنّ :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

٦- متراجحة هولدر للتكاملات :

ليكن $1 < p < \infty$ و q بحيث $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ عندئذٍ يكون :

$$\int_a^b |f(x).g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

الإثبات :

انطلاقاً من العلاقة : $AB \le \frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q}$

وبفرض :

$$A := \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p .dx \right)^{\frac{1}{p}}} \quad , \quad B := \frac{g(x)}{\left(\int_a^b |g(x)|^q .dx \right)^{\frac{1}{q}}}$$

نتابع وبالأسلوب نفسه كما تابعنا في متراجحة هولدر للمجاميع نحصل على المطلوب.

٧- متراجحة مينكوفسكي للمجاميع :

ليكن $p > 1$ و q بحيث $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ وليكن:

$a_1, a_2, ..., a_n \ge 0$ و $b_1, b_2, ..., b_n \ge 0$ فعندئذٍ :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} (b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

وما يذكر عن p صحيح بالمثل من أجل q .

الإثبات :

من أجل $p=1$ العلاقة صحيحة .

من أجل $p \geq 1$ لدينا :

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p = \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p-1}.(a_k+b_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1}$$

وبالتالي حسب متراجحة هولدر للمجاميع نجد :

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

وبالتالي يكون :

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p \leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right].\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{\overbrace{(p-1)q}^{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

نقسم الطرفين على $\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}$ نجد :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\overbrace{1-\frac{1}{q}}^{\frac{1}{p}}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

٨- متراجحة مينكوفسكي للتكاملات :

ليكن $p>1$ و q بحيث $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ والتابعان f, g بحيث :

$\int_a^b |f(x)|^p\,dx < \infty$ & $\int_a^b |g(x)|^p\,dx < \infty$ عندئذٍ :

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

وتبرهن بطريقة المتراجحة نفسها (٦ – أ) .

٩- المتراجحة الثامنة :

إذا كان $0<p\le 1$ وكان $a_1, a_2, ..., a_n \ge 0$ و $b_1, b_2, ..., b_n \ge 0$ عندئذ:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p \le \sum_{k=1}^{n} a_k^p + \sum_{k=1}^{n} b_k^p$$

الإثبات :

لنثبت أنّ :

$$(a+b)^p \le a^p + b^p$$

لنؤلّف التابع التالي :

$$f(t) = 1+t^p-(1+t)^p \quad ; \quad t\ge 0$$

$$f'(t) = p\left[t^{p-1}-(1+t)^{p-1}\right] \quad ; \quad t\ge 0$$

إنّ :

$$p\le 1 \;\Rightarrow\; p-1\le 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{t^{1-p}} \ge \frac{1}{(1+t)^{1-p}}$$

$$\Rightarrow\; f'(t)\ge 0 \quad \forall t\ge 0$$

إذن : $f(t)\ge 0$ من أجل $t\ge 0$ وبالتالي :

$$(1+t)^p \le 1+t^p \qquad (6)$$

من أجل $b=0$ تتحقق المساواة : $(a+b)^p = a^p + b^p$.

أما من أجل $b>0$ فعندئذٍ بوضع : $t=\frac{a}{b}$ والتعويض في (6) نجد :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^p \le 1+\frac{a^p}{b^p} \;\Rightarrow\; \left(\frac{a+b}{b}\right)^p \le \frac{a^p+b^p}{b^p}$$

$$(b+a)^p \le b^p + a^p$$

وبالتالي فإنّ :

$$(a_k + b_k)^p \leq a_k^p + b_k^p$$

بأخذ المجموع للطرفين نحصل على :

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^p + \sum_{k=1}^{n} b_k^p$$

ملاحظة (٢) :

في متراجحة مينكوفسكي للمجاميع (٦- أ) إذا كان $p = \infty$ فإنّ: $q = 1$ ويكون عندئذٍ:

$$\sup_n |x_n + y_n| \leq \sup_n |x_n| + \sup_n |y_n|$$

١٠- المتراجحة التاسعة :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)^p \leq n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \quad ; \quad p \geq 1$$

الإثبات :

حسب متراجحة هولدر للمجاميع لدينا :

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| .1 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (1)^q\right)^{\frac{1}{q}} . \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq n^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)^p \leq n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \quad ; \quad p \geq 1$$

ملاحظة (٣) :

إنّ جميع المتراجحات السابقة صحيحة في الساحة العقديّة والإشارة || عندئذٍ تدل على الطويلة .